第一章. 极限与连续

1.1 函　数

一、　预备知识

二、映射

三、函数

四、初等函数

五、双曲函数与反双曲函数

一、 预备知识

1. 集合 （略）

2. 区间 （略）共四个有限区间，五个无限区间

3. 符号：

$\forall$： "对任给的", "对所有的"

如："$\forall x \in A$"表示：对集合中所有的元素x

对集合中的任一元素x

$\exists$： "存在", "有". 如： "$\exists x \in A$"表示在集合A中存在一个元素x.

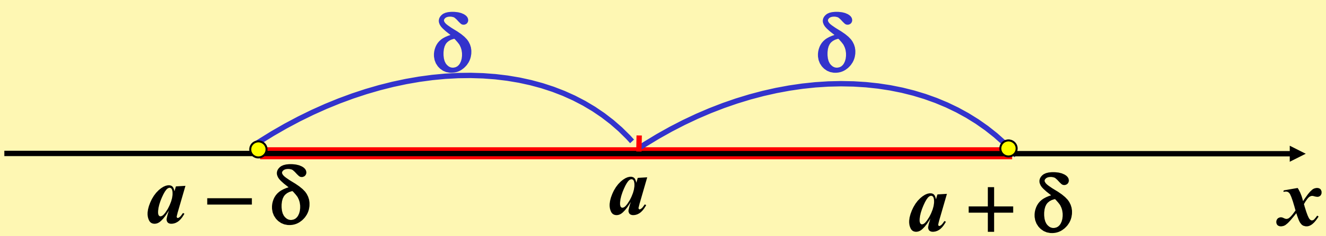
南京邮电大学 Nanjing University of Posts and Telecommunications

4. 邻域： 设a与δ是两个实数，且$\delta > 0$.

数集$\{x \mid |x-a| < \delta\}$称为点$a$的$\delta$邻域，

点a叫做这邻域的中心，δ叫做这邻域的半径.

$$U_\delta(a) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\} = U(a,\delta)$$



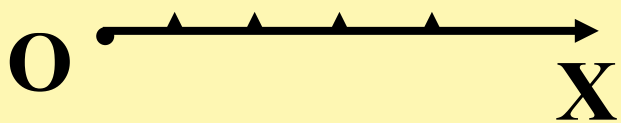
点a的去心的δ邻域，记作$\overset{o}{U}_\delta(a)$

$$U^o{}_\delta(a) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\} = U^o(a,\delta)$$

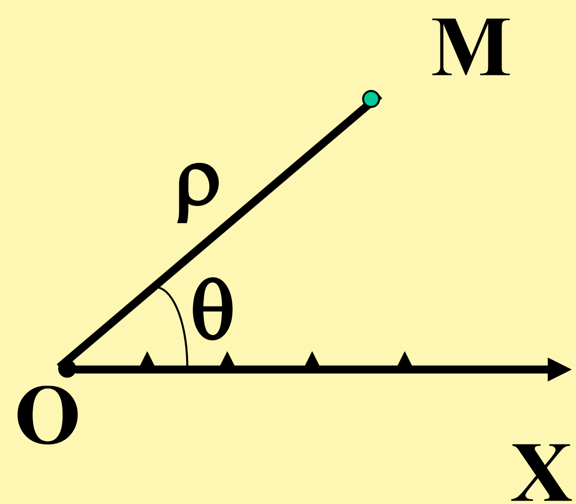
一般用δ表示很小的数

5. 极坐标

极坐标系： 在平面内取一个定点O，叫做**极点**，引一条射线OX，叫做**极轴**。再选定一个长度单位和**角度单位**及**它的正方向**（通常取逆时针方向）



对于平面上任意一点*M*，用ρ表示线段OM的长度，用θ表示从OX到OM的角度，ρ叫做点M的**极径**，θ叫做点M的**极角**，有序数对（ρ，θ）就叫做M的极坐标。



极坐标系下点与它的极坐标的对应情况

[1]给定（ρ, θ），就可以在极坐标平面内确定唯一的一点M。

[2]给定平面上一点M，但却有无数个极坐标与之对应。原因在于：极角有无数个

一般地，若(ρ，θ)是一点的极坐标，则(ρ，$\theta+2k\pi$)、都可以作为它的极坐标.

限定$\rho>0$，　$0\leqslant\theta<2\pi$或$-\pi<\theta\leqslant\pi$，那么除极点外，平面内的点和极坐标就可以一一对应了.

极坐标与直角坐标的互化关系式:

互化公式的三个前提条件:

1. 极点与直角坐标系的原点重合;
2. 极轴与直角坐标系的x轴的正半轴重合;
3. 两种坐标系的单位长度相同.

设点M的直角坐标是（x, y）极坐标是（ρ, θ）

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

当$x \neq 0$时:

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

例 (1) 过点$A\ (a,0)$ $\left(a>0\right)$，且垂直于极轴的直线l的极坐标方程：

$$\rho\cos\theta=a$$

（2）中心在极点,半径为a的圆：

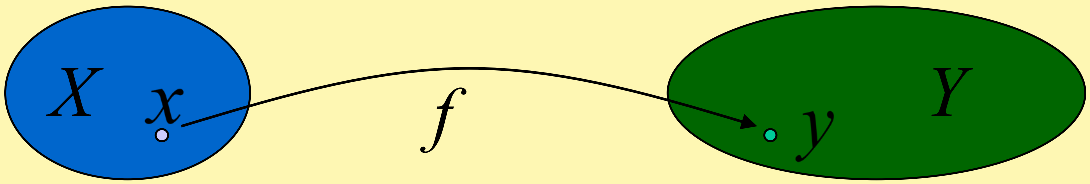
$$\rho=a$$

（3）中心在$A\ (a,0)(a>0)$半径为a的圆：

$$\rho=2a\cos\theta$$

二、 映射

定义1. 设 X , Y 是两个非空集合,若存在一个对应规则 f, 使得 $\forall x \in X$,有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应, 则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作 $f : X \to Y$.



元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的像, 记作 $y = f(x)$.

元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的原像 .

集合 X 称为映射 f 的定义域 ;

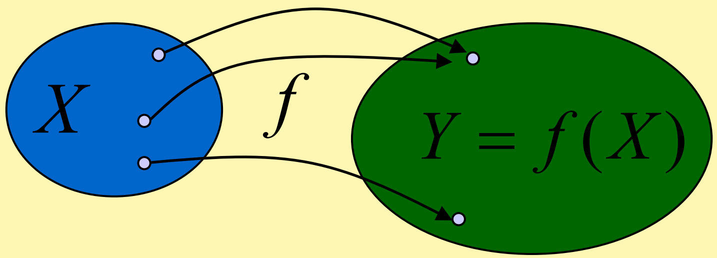
Y 的子集 $w_f = f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$ 称为 f 的 值域 .

注意: 1) 映射的三要素— 定义域 , 对应规则, 值域

2) 元素 x 的像 y 是唯一的, 但 y 的原像不一定唯一.

对映射 $f : X \to Y$

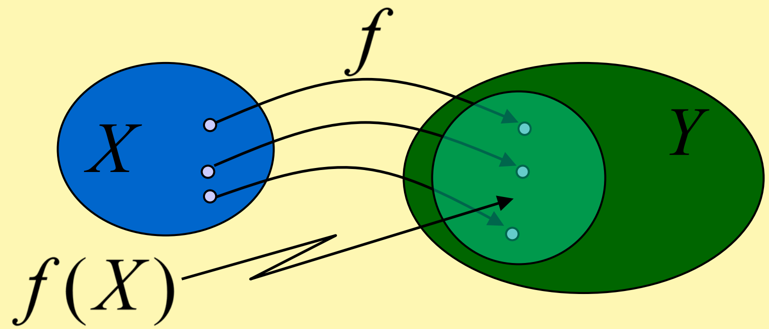
若 $f(X) = Y$, 则称 f 为满射;



若 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 有

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

则称 f 为单射;



若 f 既是满射又是单射, 则称 f 为双射 或一一映射.

三、函数

1. 函数的概念

定义2. 设数集$D \subset \mathbf{R}$, 则称映射$f: D \to \mathbf{R}$为定义在 D 上的函数，记为

$$y = f(x),\ x \in D$$

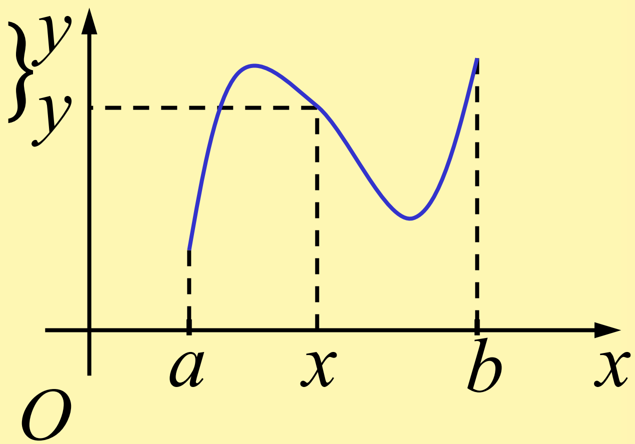
定义域

因变量

自变量

$$w_f = f(D) = \{\, y \mid y = f(x), x \in D \,\}$$

称为值域



几何意义：函数$y=f(x)$，$x \in$D

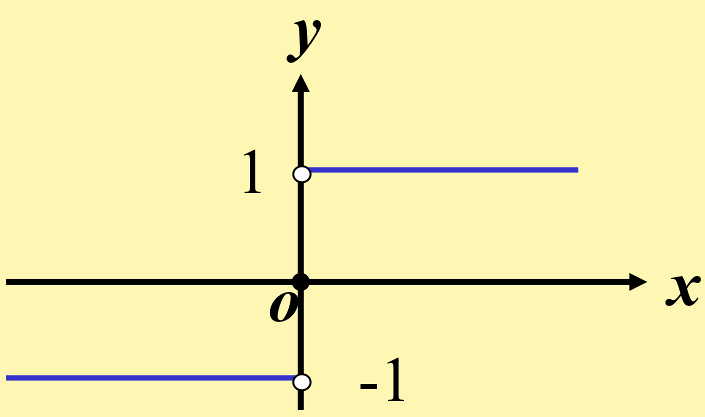
在平面直角坐标系中表示一段曲线。

1.2. 分段函数

在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同的式子来表示的函数,称为分段函数.

几个常用的分段函数:

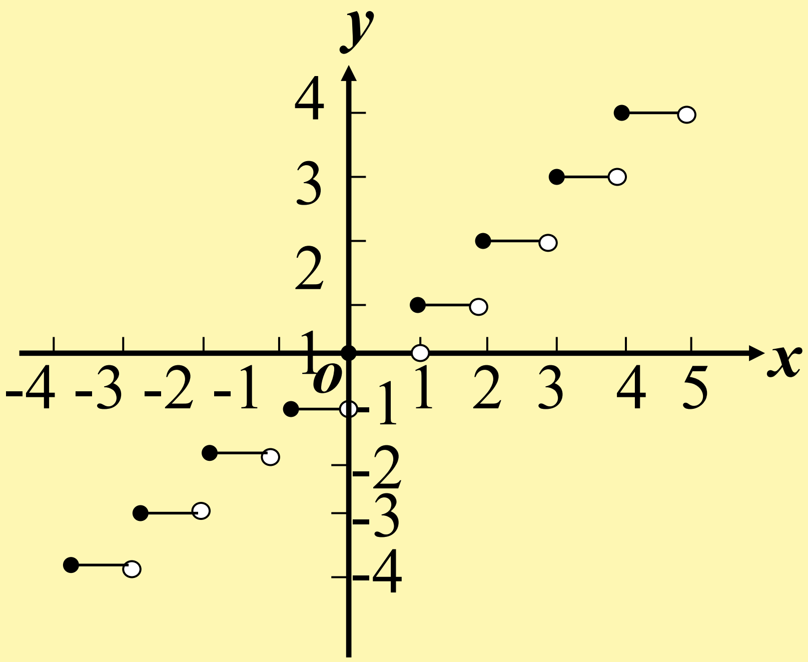
(1) 符号函数 $$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & 当 x > 0 \\ 0 & 当 x = 0 \\ -1 & 当 x < 0 \end{cases}$$



$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$$

(2) 取整函数　$y = [x]$

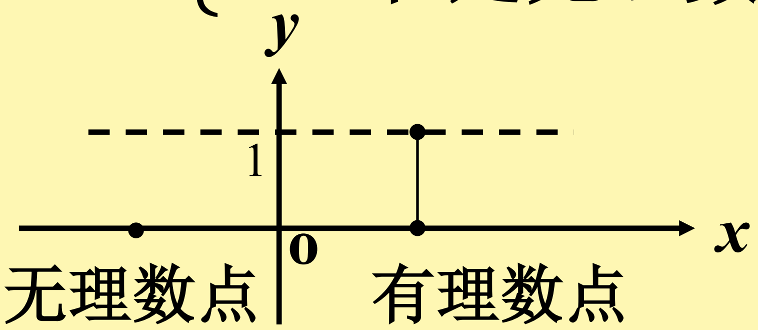
$[x]$表示不超过 x 的最大整数



阶梯曲线

(3) 狄利克雷（Dirichlet ）函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当}x\text{是有理数时} \\ 0 & \text{当}x\text{是无理数时} \end{cases}$$



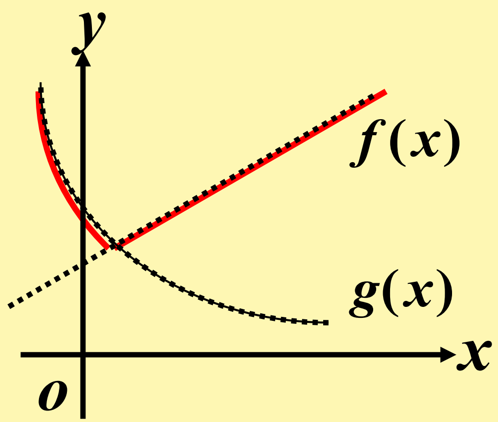
(1) 函数为偶函数, 无法画出函数图像

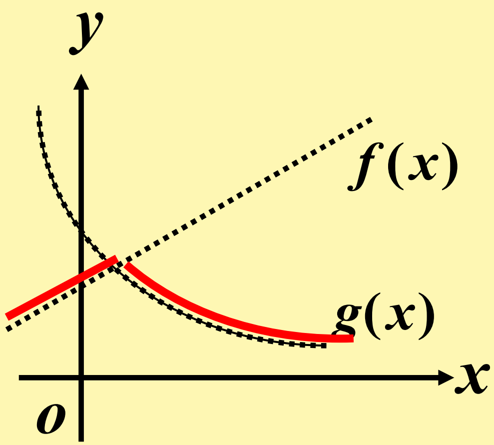
(2) 是周期函数

任何有理数都是它的周期，但没有最小正周期

(4) 取最值函数

$y = \max\{f(x), g(x)\}$　　　$y = \min\{f(x), g(x)\}$





$$\max\{x^2, x\} = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

2 函数的运算

2.1 复合运算与复合函数

定义 设有两函数$y=f(u)$与$u=g(x)$（定义域设为D），且 g 的值域包含在 f 的定义域中，那么对于D中任意的元素 x，通过中间变量u，有唯一的y值与之对应，从而得到一个以x为自变量，y为因变量的函数，称为由函数 f 对g 左复合而成的函数。记为 $y=f[g(x)]$。

$$y=\sin u,\ u=x^2$$

注 (1) 复合函数可以由二个以上的函数复合而成。

(2) 要求：会把复杂的函数分解成由几个简单的函数复合而成。

例如 $y=\arctan\ln(1+x^2)$

由 $y=\arctan u, u=\ln v, v=1+x^2$ 复合而成。

2.2 反函数

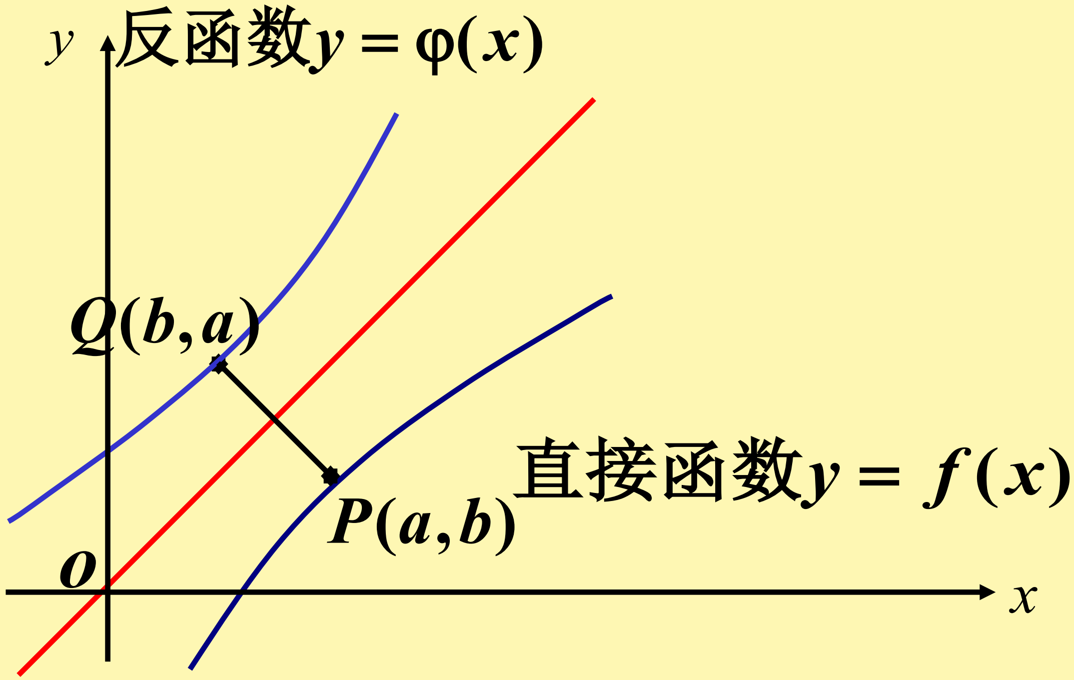
定义 设函数 f：$D \to W = f(D)$，

$$x \in D \xrightarrow{\ f\ } y \in W \qquad (1-1\text{对应})$$

$$f^{-1}：W = f(D) \to D，\ y \to x = f^{-1}(y)$$

按照函数的概念，就得到一个W到D的函数，称它为f的反函数

根据习惯，反函数的自变量用x，因变量用 y表示，就成为了 $y = f^{-1}(x)$。



直接函数与反函数的图形关于直线$y=x$对称.

如：$y=\ln x$与$y=e^x$

3 函数的初等性质

3.1 周期性 （略） 3.2 奇偶性 （略）

3.3 单调性 （略）

3. 4 有界性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为D，区间 $I\subseteq D$

(1)如果存在数 K_1，使得 $f(x)\le K_1$ 对任意 $x\in I$ 都成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上有上界，而 K_1 称为函数 $y=f(x)$ 的一个上界。

$$\text{函数}\,f(x)\text{有上界}\Leftrightarrow \exists K_1,\forall x\in I,\text{有}\,f(x)\le K_1$$

(2)如果存在数K_2，使得$f(x) \geq K_2$对任意$x \in I$都成立，则称函数$y=f(x)$在I上有下界，而K_2称为函数$y=f(x)$的一个下界。

函数$f(x)$有下界$\Leftrightarrow \exists K_2, \forall x \in I,$有$f(x) \geq K_2$

(3)如果存在数M，使得$|f(x)| \leq M$对任意$x \in I$都成立，则称函数$y=f(x)$在I上有界。如果这样的M不存在，就称函数$y=f(x)$在I上无界。

函数$f(x)$有界$\Leftrightarrow \exists M>0\ \forall x \in I,$有$\left|f(x)\right| \leq M$

函数$f(x)$无界$\Leftrightarrow \forall M>0\ \exists x_0 \in I,$有$\left|f(x_0)\right| > M$

（4）有界函数的上下界都不是唯一的。

（5）一个函数有界等价于它既有上界又有下界.

函数$f(x)$有界$\Leftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in I,$有$|f(x)| \le M$

函数$f(x)$有上界$\Leftrightarrow \exists K_1, \forall x \in I,$有$f(x) \le K_1$

函数$f(x)$有下界$\Leftrightarrow \exists K_2, \forall x \in I,$有$f(x) \ge K_2$

证:“ $\Rightarrow$” .　取$K_1 = M, K_2 = -M$

‘ $\Leftarrow$”. 取$M = \max\{|K_1|, |K_2|\}$

函数$f(x)$有界$\Leftrightarrow \exists M>0\ \forall x\in I$,有$|f(x)|\le M$

函数$f(x)$无界$\Leftrightarrow \forall M>0\ \exists x_0\in I$,有$|f(x_0)|>M$

例 试证 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(1,2)$内有界，在$(0,1)$内无界。

证明 当 $x\in(1,2)$ 时，显然有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\le 1$

所以，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(1,2)$内有界。

对于任意正数 M，取 $x_0=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$ ，

有 $\left|\dfrac{1}{x_0}\right|=M+1>M$ ，故函数无界.

四　初等函数

4. 1 基本初等函数

(1)幂函数　(2)指数函数　(3)对数函数

(4) 三角函数

正弦函数，余弦函数，正切函数，余切函数

三角函数公式 (课后自己回忆并整理)

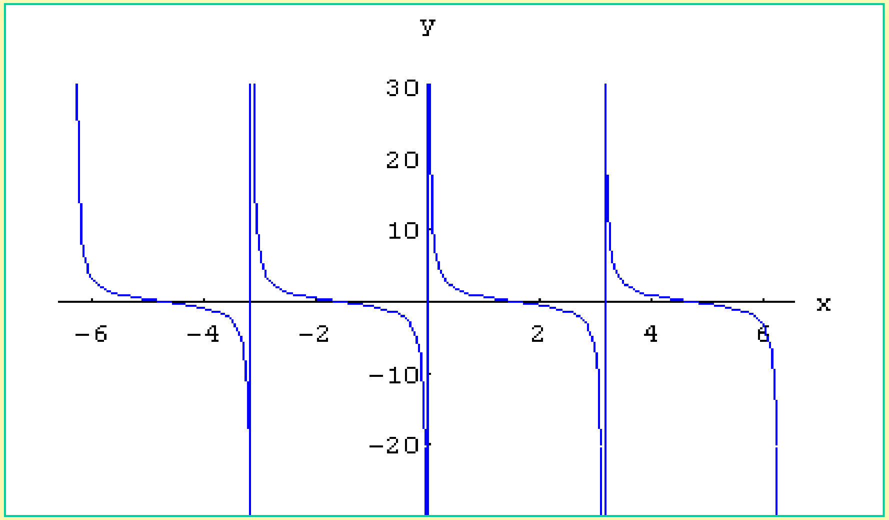
和差角公式

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

积化和差公式　和差化积公式　万能公式

余切函数

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$



奇函数；

定义域：$\{x \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$；

周期函数，

周期为$k\pi\left(k \in \mathbb{Z}且k \neq 0\right)$，最小正周期 $T = \pi$；

单调递减区间：$\left(k\pi,(k+1)\pi\right)$，$k \in \mathbb{Z}$

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$

(1)定义域: $\{x \mid x \neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathrm{Z}\}$

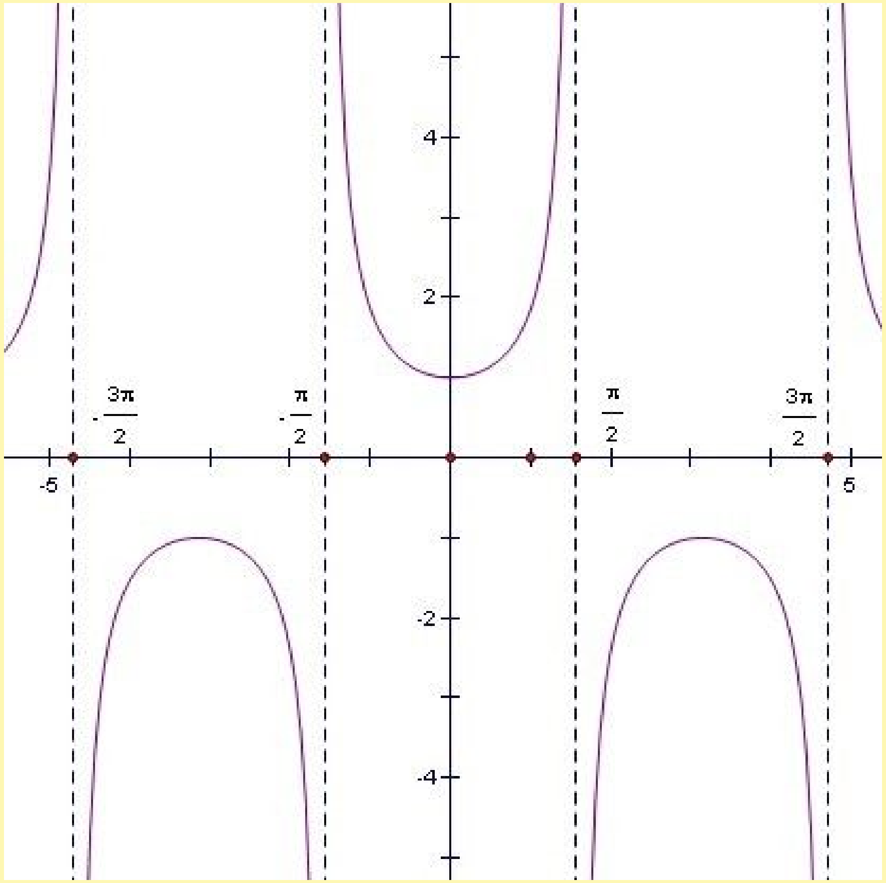
(2) $|\sec x| \geq 1$,

是无界函数

(3) $y=\sec x$

是偶函数

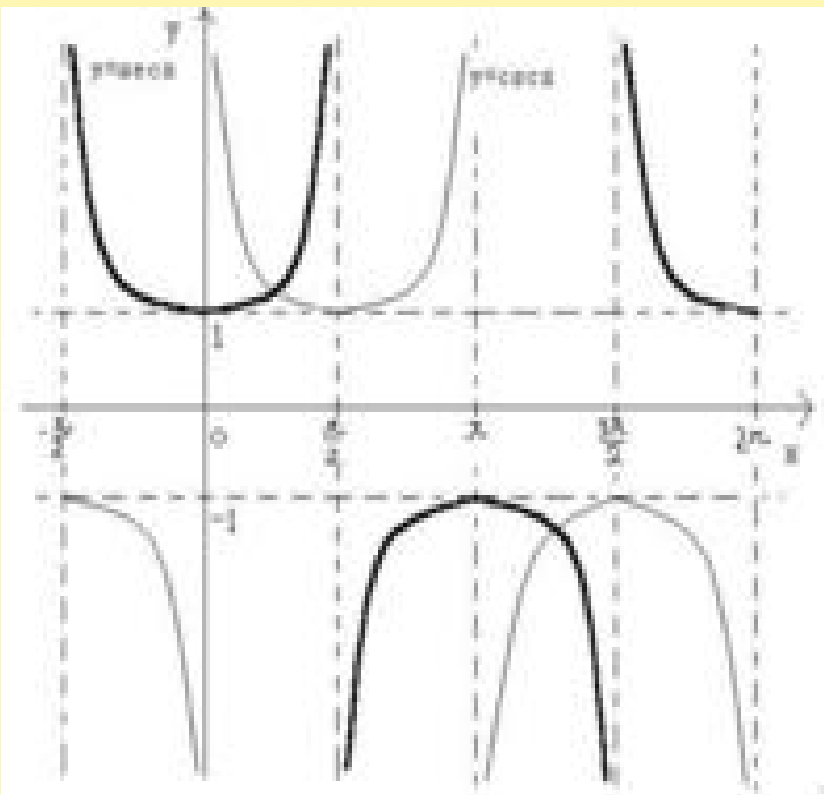
$\sec^2 x = 1+\tan^2 x$



余割函数 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

(1)定义域:$\{x \mid x \neq k\pi, k \in Z\}$ $(2)\ y = \csc x$是奇函数

$(3)\ |\csc x| \geq 1$,是无界函数



$$\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sin x} = \csc x$$

粗线是正割函数,

细线是余割函数

$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

(5) 反三角函数

正弦函数$y=\sin x$在区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上单调增加，具有反函数，记为$y=\arcsin x$.

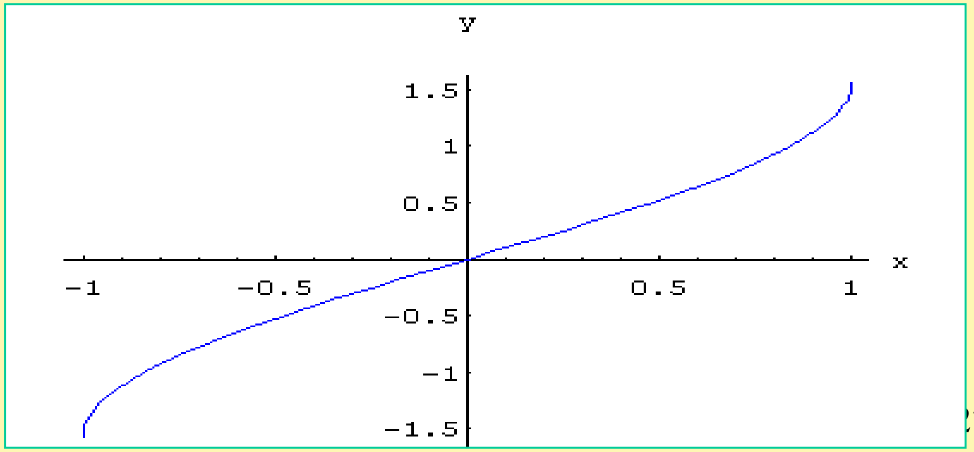
定义域$[-1,1]$，值域$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，单调增加.

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x$$

反正弦函数

$$y=\arcsin x$$

奇函数



余弦函数$y=\cos x$在区间$[0,\pi]$上单调减少， 具有反函数, 记为$y=\arccos x$.

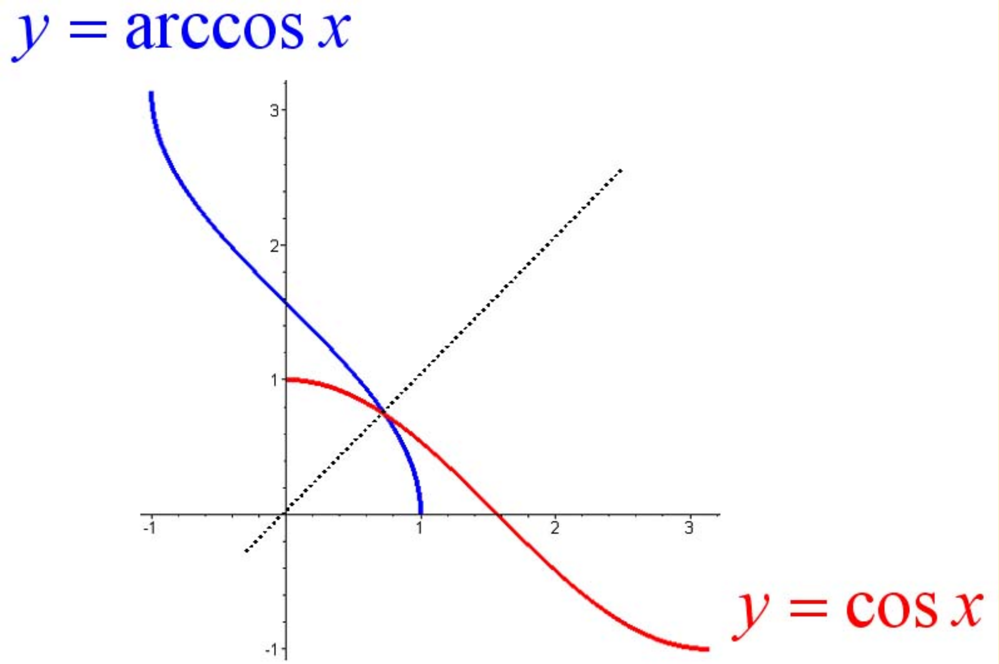
定义域$[-1,1]$,值域$[0,\pi]$,单调减少.

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$$

反余弦函数

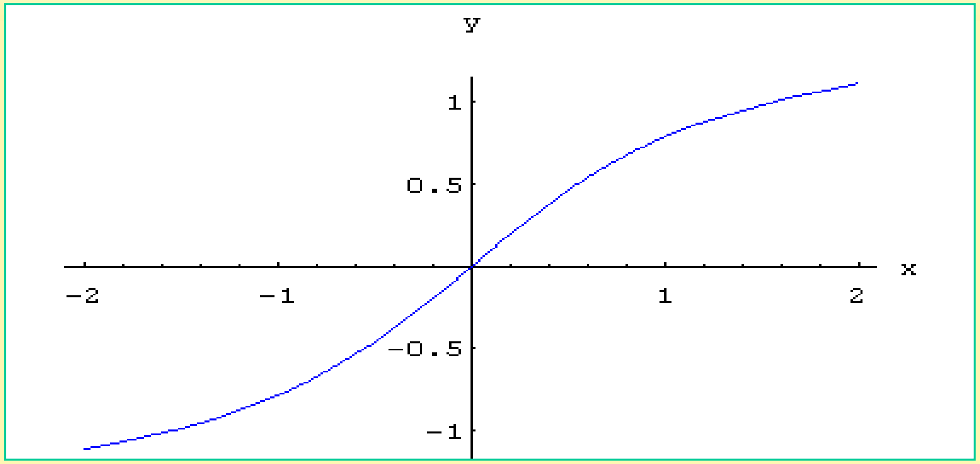
$y=\arccos x$

非奇非偶函数



反正切函数

$y = \arctan x$

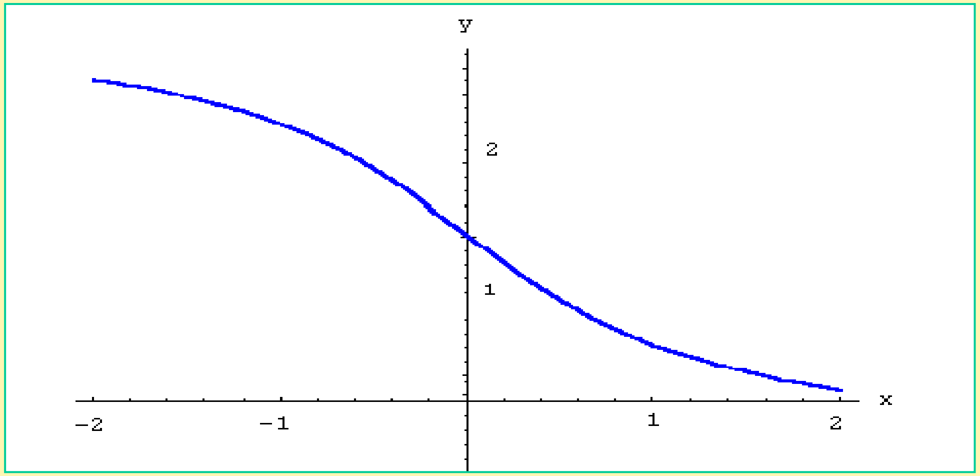


定义域 R, 值域 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 单调增加, 奇函数

反余切函数

$y = arc\cot x$

定义域 R



值域 $(0, \pi)$, 单调减少, 非奇非偶函数

4.2 初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的可用一个式子表示的函数，称为初等函数。

4.3 双曲函数与反双曲函数

双曲正弦: $$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

双曲余弦: $$chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

双曲正切: $$thx=\frac{shx}{chx}$$

奇偶性等，反双曲函数，有关公式（略）